جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

بنام خدا

ماخ

دفترچه سوالات و پاسخ تشریحی
مرحله دوم
سیزدهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی سال ۱۳۸۴

مدت آزمون (دقیقه)	تعداد سوالات	
	مساله‌های تشریحی	سوالات چند گزینه‌ای
۱۸۰	۶	-

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

تذکرات آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

- این آزمون شامل **۶ مسأله‌ی تشریحی** و وقت آن **۱۸۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز **نیست**.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

مسأله‌های مرحله‌ی دوم سیزدهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی
دانش‌آموزان کشور، آذرماه ۱۳۷۴

۱- نشان دهید برای هر عدد طبیعی $n \geq ۳$، دو مجموعه‌ی $A = \{x_۱, x_۲, \dots, x_n\}$ و $B = \{y_۱, y_۲, \dots, y_n\}$ از اعداد صحیح وجود دارد به‌طوری‌که

$$A \cap B = \varnothing \qquad (۱)$$

$$x_۱ + x_۲ + \dots + x_n = y_۱ + y_۲ + \dots + y_n \qquad (۲)$$

$$x_۱^۲ + x_۲^۲ + \dots + x_n^۲ = y_۱^۲ + y_۲^۲ + \dots + y_n^۲ \qquad (۳)$$

۲- مثلث ABC که زوایای آن حاده هستند و خط L واقع در صفحه‌ی مثلث مفروض‌اند. قرینه‌های خط L را نسبت به هر یک از اضلاع مثلث ABC به دست می‌آوریم تا یکدیگر را در A'، B' و C' قطع کنند. ثابت کنید مرکز دایره‌ی محاطی داخلی مثلث $A'B'C'$ روی دایره‌ی محیطی مثلث ABC قرار می‌گیرد.

۳- ۱۲k نفر در یک مهمانی شرکت کرده‌اند. هر نفر دقیقاً با $۳k + ۶$ نفر دیگر از مهمانان دست می‌دهد. همچنین می‌دانیم تعداد افرادی که با [هردوی] هر دو نفر دست می‌دهند، عددی ثابت است. تعداد افراد شرکت‌کننده در این مهمانی را تعیین کنید.

۴- فرض کنید $S = \{۲^m ۳^n \mid m, n \in \mathbb{N} \cup \{۰\}\}$، ثابت کنید که هر عدد طبیعی را می‌توان برحسب حاصل جمع اعضای متمایز S نوشت که هیچ‌یک از عواملِ جمع مضربی از عامل دیگری نباشد. (مثلاً $۱۹ = ۹ + ۶ + ۴$).

۵- ثابت کنید که به ازای هر عدد صحیح $n \geq ۰$ داریم:

$$\left\lceil \sqrt{n} + \sqrt{n+۱} + \sqrt{n+۲} \right\rceil = \left\lceil \sqrt{۹n + ۸} \right\rceil$$

منظور از $\lceil x \rceil$، کوچک‌ترین عدد صحیحی است که بزرگ‌تر از x یا مساوی آن است.

۶- در چهاروجهی ABCD فرض کنید A'، B'، C' و D' به ترتیب مراکز دوایر محیطی مثلث‌های BCD، CDA، DAB و ABC باشند. اگر صفحه‌ای را که از نقطه‌ی X بر خط YZ عمود می‌شود، به $S(X, Y Z)$ نمایش دهیم ثابت کنید چنانچه A'، B'، C' و D' در یک صفحه نباشند چهار صفحه $S(A, C'D')$، $S(B, A' D'$، $S(C, A' B'$ و $S(D, B'C')$ از یک نقطه می‌گذرند.

مسأله‌های مرحله‌ی دوم سیزدهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی
دانش‌آموزان کشور، آذرماه ۱۳۷۴

۱- **راه حل اول**. کافی است بگیریم

$$A=\{1,2,3,\dots,n-1\}\cup\left\{-\frac{n(n-1)}{2}\right\}$$
$$B=\{-1,-2,-3,\dots,-(n-1)\}\cup\left\{\frac{n(n-1)}{2}\right\}$$

به وضوح A و B در شرایط مساله صدق می‌کنند.

البته در صورت مساله اعداد صدق مورد نظر بوده است ولی حتی اگر منظور اعداد طبیعی باشد دقت می‌کنیم که اگر هر دسته جواب را به اندازه یک عدد صحیح منتقل کنیم، باز هم جواب است.

راه حل دوم. به روش استقراء عمل می‌کنیم

$$n=3:\qquad A=\{0,4,5\},\qquad B=\{1,2,6\}$$

فرض کنید برای $n=k$ شرایط مورد نظر برقرار باشد، یعنی

$$\sum_{i=1}^{k}x_i=\sum_{i=1}^{k}y_i\,,\qquad \sum_{i=1}^{k}x_i^2=\sum_{i=1}^{k}y_i^2$$

حال درستی حکم را برای $n=k+1$ نشان می‌دهیم. فرض کنید

$$A=\{x_1,\dots,x_{n-1},rx_n,x_n+ry_n\}$$
$$B=\{y_1,\dots,y_{n-1},ry_n,y_n+y_n\}$$

برای $r\neq 0$ شرایط مورد نظر برقرار است. فقط کافی است r را به اندازه کافی بزرگ بگیریم تا هیچ یک از دو مجموعه اعضای برابر نداشته باشد.

راه حل سوم. توجه می‌کنیم که دسته مجموعه‌های ۳ عضوی، ۴ عضوی و ۵ عضوی زیر جواب هستند.

$n=1: A=\ 0,4,5\ ,\quad B=\ 1,2,6$

$n=2: A=\ 10,-10,11,-11\ ,\quad B=\ 5,-5,14,-14$

$n=3: A=\ 10,11,-14,-5,-2\ ,$

$\qquad B=\ -10,-11,14,5,2$

برای هر $n\geq 3$ مفروض، برحسب آنکه $n=3k$, $n=3k+1$ و یا $n=3k+2$, به کمک دسته جواب‌های فوق و با توجه به اینکه انتقال هر دسته جواب به اندازه یک عدد صحیح بازهم جواب است، جواب مورد نظر را می‌سازیم.

۲- این سه خط را L',L'',L''' می‌گیریم و فرض می‌کنیم $\alpha=\angle A,\beta=\angle B,\gamma=\angle C$. خط L' با عمل قرینه کردن نسبت به BC به خط L می‌رود و خط L با قرینه کردن نسبت به AB به خط L''' برده می‌شود، پس L''' حاصل دوران L' حول نقطه B به اندازه زاویه 2β است. حال چون B از L' و L''' به یک فاصله است، پس نیمساز زاویه B' است. مشابهاً با دورانی به مرکز A و به اندازه زاویه، خط L'' به L''' برده می‌شود و AA' نیمساز زاویه A' است، و بالاخره با دورانی به اندازه زاویه 2γ حول C، خط L'' نیز به L' می‌رود، و CC' نیمساز زاویه C' است. پس این سه خط در نقطه w که مرکز دایره محاطی داخلی مثلث $A'B'C'$ است همرسند. نتیجه می شود که

$$\angle C'B'w = ۹۰^\circ - \beta$$
$$\angle B'C'w = ۹۰^\circ - \gamma$$

در نتیجه

$$\angle BwC = \angle C'B'w = \beta + \gamma = ۱۸۰^\circ - \alpha$$

پس w روی دایره محیطی مثلث ABC قرار می‌گیرد.

حالت خاص. اگر L از محل تلاقی ارتفاعات مثلث ABC بگذرد L''', L'', L' از یک نقطه روی دایره محیطی مثلث ABC می‌گذرند، یعنی $\Delta A'B'C'$ یک نقطه روی دایره محیطی ΔABC است.

۳- فرض کنید تعداد افرادی که با هر دو نفر دست می‌دهند n باشد. شخص a را در نظر بگیرید، فرض کنید

$$B = \{\text{افرادی که با } a \text{ دست داده‌اند}\}$$
$$C = \{\text{افرادی که با } a \text{ دست نداده‌اند}\}$$

می‌دانیم

$$|B| = ۳k + ۶$$
$$|C| = ۹k - ۷$$

اگر $b \in B$ باشد، افرادی که هم با a و هم با b دست می‌دهند در B هستند، پس b با n نفر در B دست می‌دهد و با $۳k + ۵ - n$ نفر در C.

اگر $c \in C$ باشد همه افرادی که هم با a و هم با b دست می‌دهند در B هستند، پس c با n نفر در B دست می‌دهد.

پس در مجموع تعداد دست دادن‌های بین B و C رابطه زیر را نتیجه می‌دهد.

$$(۳k+۶)(۳k+۵-n) = (۹k-۷)n$$

$$۹k^۲ - ۱۲kn + ۳۳k + n + ۳۰ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} n = ۳m \\ ۴m = k + ۳ + \dfrac{۹k+۴۳}{۱۲k-۱} \end{cases}$$

حال برای $k \geq ۱۵$ داریم $۱۲k - ۱ < ۹k + ۴۳$, $۴m$ صحیح نخواهد بود، و برای $۱ \leq k \leq ۱۴$، فقط برای $k = ۳$ جواب صحیح داریم، پس ۳۶ نفر در مهمانی بوده‌اند.

۴- با استقرا عمل می‌کنیم

$$۱ = ۱,\quad ۲ = ۲,\quad ۳ = ۳,\quad ۴ = ۲^۲,\quad ۵ = ۲ + ۳,\quad \ldots$$

فرض کنید برای هر عدد کوچکتر از k حکم درست باشد، حال حکم را برای k ثابت می‌کنیم.

حالت اول. k زوج، $k = ۲l$، در این صورت l را به صورت حاصلجمع مورد نظر می‌نویسیم و هر کدام از عوامل را دو برابر می‌کنیم.

حالت دوم. k فرد، فرض کنید p بزرگترین توان از عدد ۳ است که کوچکتر از k است، فرض کنید $q = \dfrac{k-p}{۲}$، عدد p را به عنوان یکی از عوامل جمع بگیرید و اگر $q > ۰$ آنگاه با استقرا q را می‌توان به صورت حاصل‌جمع مورد نظر، $q = \sum s_i$، نوشت. نشان می‌دهیم $k = p + \sum ۲s_i$ یک حاصلجمع مورد نظر است. چون p توانی از ۳ است، پس مضربی از $۲s_i$ نیست حال اگر به ازای یک i، عدد $۲s_i$ مضربی از p باشد آنگاه $۲s_i \geq ۲p$ و این متناقض با این است که $k < ۳p$.

۵- به ازای $n=۰,۱,۲$ رابطه برقرار است، به ازای $n\geq ۳$ با استفاده از عبارت درجه دوم $(x-۱)x(x+۱)-(x-\frac{۱}{۹})^۳$ (حدس ریشه‌ها) نتیجه می‌شود

$$n(n+۱)(n+۲)>(n+\frac{۸}{۹})^۳$$

حال با استفاده از نامساوی میانگین هندسی و حسابرسی داریم

$$\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+۱}+\sqrt{n+۲}}{۳}>\sqrt[۳]{\sqrt{n}\sqrt{n+۱}\sqrt{n+۲}}$$
$$>\sqrt{n+\frac{۸}{۹}}$$

و

$$\sqrt{n}+\sqrt{n+۱}+\sqrt{n+۲}>\sqrt{۹n+۸}$$

و با استفاده از نامساوی میانگین جذر داریم

$$\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+۱}+\sqrt{n+۲}}{۳}>\sqrt{\frac{n+n+۱+n+۲}{۳}}$$

پس

$$\sqrt{n}+\sqrt{n+۱}+\sqrt{n+۲}<\sqrt{۹n+۹}$$

چون هیچ عدد صحیحی بین $\sqrt{۹n+۸}$ و $\sqrt{۹n+۹}$ قرار ندارد، پس

$$\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+۱}+\sqrt{n+۲}\right]=\left[\sqrt{۹n+۸}\right]$$

۶- کره‌هایی به مرکزهای D',C',B',A' و به ترتیب به شعاع هایی برابر با شعاع دایره محیطی مثلث های ABC , DAB, CDA, BCD در نظر می‌گیریم و آن‌ها را به ترتیب $S_۱,S_۲,S_۳,S_۴$ می‌نامیم. A روی کره‌های $S_۳,S_۴$ قرار دارد و $C'D'$ خط المرکزین $S_۳,S_۴$ می‌باشد، بنابراین $S(A,C'D')$ صفحه اصلی دو کره $S_۳,S_۴$ می‌باشد (صفحه اصلی دو کره، مشابه محور اصلی دو دایره، مکان هندسی نقاطی است که نسبت به دو کره دارای یک قوت هستند و می شود ثابت کرد که بر خط المرکزین عمود است). به همین ترتیب $S(D,B',C')$, $S(C,A'B')$, $S(B,A'D')$ به ترتیب صفحات اصلی کره های $(S_۲,S_۳),(S_۱,S_۲),(S_۱,S_۴)$ می‌باشند و لذا از یک نقطه می‌گذرند (زیرا مرکزهای این کره‌ها در یک صفحه نیستند).